KVIHT.RU
+7 (812) 715-41-64

@KVIHT

ПРОЧНОСТЬ ТУРБОКОМПРЕССОРОВ

Курс лекций.

Доцент, кандидат технических наук

Юрий Владимирович Кожухов

Научно-инжиниринговая группа «Компрессорная, вакуумная, холодильная техника и системы транспорта и переработки газа»

www.kviht.ru

Доц. Ю.В. Кожухов

ПРОЧНОСТЬ ТУРБОКОМПРЕССОРОВ. *Лекция 2.*

СОДЕРЖАНИЕ

- **Историческая справка**
- **Раздел 2. Элементы теории деформации.**

1. Связь между перемещениями и деформациями в прямоугольной системе координат;

2. Связь между перемещениями и деформациями в цилиндрической системе координат;

3. Главные оси деформированного состояния и главные деформации (удлинения);

4. Уравнения совместности деформаций.

@KVIHT

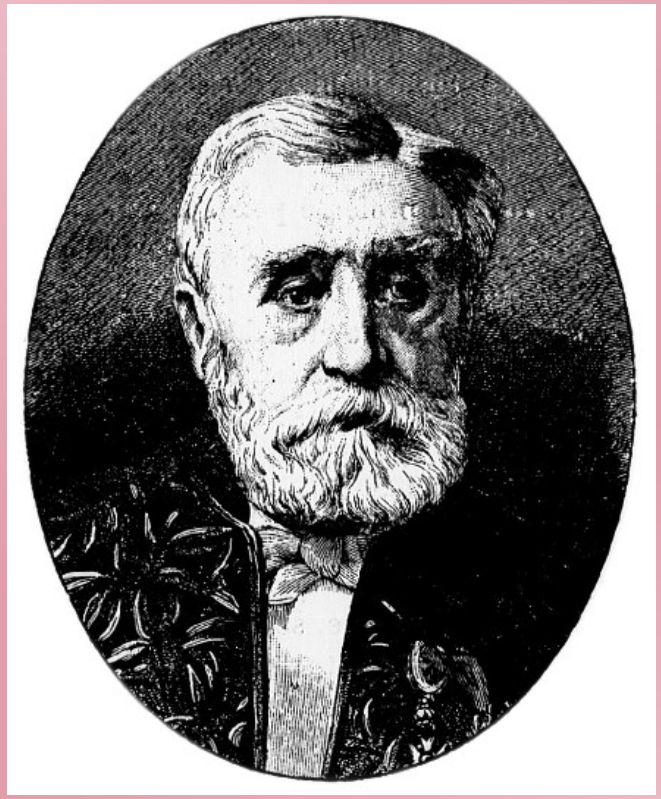
Больше материалов по компрессорной технике на сайте научно-инжиниринговой группы «Компрессорная, вакуумная, холодильная техника и системы транспорта и переработки газа» www.kviht.ru, +7 (812) 715-41-64

Доц. Ю.В. Кожухов

ПРОЧНОСТЬ ТУРБОКОМПРЕССОРОВ. ИСТОРИЧЕСКАЯ СПРАВКА

Адемáр Жан-Клод Барре́ де Сен-Венáн (1797 – 1886)

Французский инженер, механик и математик. По окончании (1816) Политехнической школы в Париже работал инженером, затем преподавал в Школе мостов и дорог в Париже и в агрономическом институте в Версале. Основные труды по теории упругости, сопротивлению материалов, гидравлике, гидродинамике. Ввёл полуобратный метод решения задач в теории упругости, сформулировал принцип смягчения граничных условий (принцип Сен-Венана) и построил общую теорию кручения и изгиба призматических стержней (1855). Исследовал соударения упругих стержней. Заложил основы теории пластичности идеально пластичного тела. Изучал также истечение газов из отверстий и движение жидкостей в открытых руслах.



@KVIHT

Больше материалов по компрессорной технике на сайте научно-инжиниринговой группы «Компрессорная, вакуумная, холодильная техника и системы транспорта и переработки газа» www.kviht.ru, +7 (812) 715-41-64

Доц. Ю.В. Кожухов

ПРОЧНОСТЬ ТУРБОКОМПРЕССОРОВ. ИСТОРИЧЕСКАЯ СПРАВКА

Огюстен Луи Коши (1789 – 1857)

Великий французский математик, член Парижской академии наук, Лондонского королевского общества, Петербургской академии наук и других академий. Коши написал свыше 800 работ, полное собрание его сочинений содержит 27 томов. Его работы относятся к различным областям математики (преимущественно к математическому анализу) и математической физики.

Коши впервые дал строгое определение основным понятиям математического анализа — пределу, непрерывности, производной, дифференциалу, интегралу, сходимости ряда и т. д. Его определение непрерывности опиралось на понятие бесконечно малого, которому он придал новый смысл: у Коши бесконечно малое — переменная величина, стремящаяся к нулю. Ввёл понятие радиуса сходимости ряда. Курсы анализа Коши, основанные на систематическом использовании понятия предела, послужили образцом для большинства курсов позднейшего времени.

Коши много работал в области комплексного анализа, в частности, создал теорию интегральных вычетов. В математической физике глубоко изучил краевую задачу с начальными условиями, которая с тех пор называется «задача Коши».

Коши заложил основы математической теории упругости. Он рассматривал тело как сплошную среду и вывел систему уравнений для напряжений и деформаций в каждой точке. В работах по оптике Коши дал математическую разработку волновой теории света и теории дисперсии. Ему принадлежат также исследования по геометрии (о многогранниках), по теории чисел, алгебре, астрономии и во многих других областях науки.

- **Связь между перемещениями и деформациями в прямоугольной системе координат.**

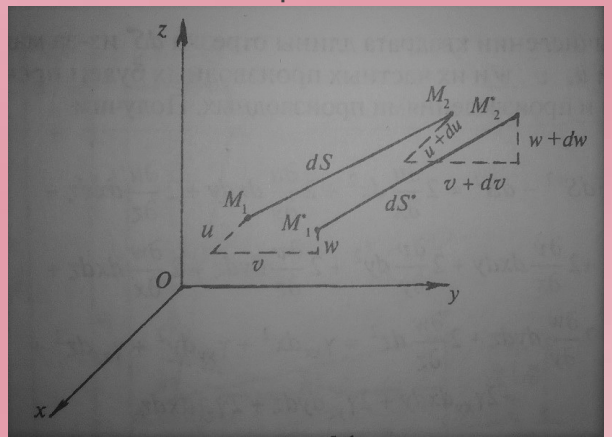
Рассмотрим очень малый линейный элемент упругого тела – отрезок M_1M_2, длину которого обозначим *dS*, а проекции на оси координат - dx, dy, dz.

При деформировании тела точки M_1 и M_2 перемещаются. Компоненты перемещения точки M_1, параллельные соответствующим осям координат x, y, z, обозначим u, v, w. Тогда компоненты перемещения точки M_2 можно выразить $u + du, v + dv, w + dw$. При этом компоненты перемещений являются непрерывными функциями координат $u = u(x, y, z), v = v(x, y, z), w = w(x, y, z)$ и имеют полные дифференциалы по координатам

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy + \frac{\partial u}{\partial z}dz$$

$$dv = \frac{\partial v}{\partial x}dx + \frac{\partial v}{\partial y}dy + \frac{\partial v}{\partial z}dz$$

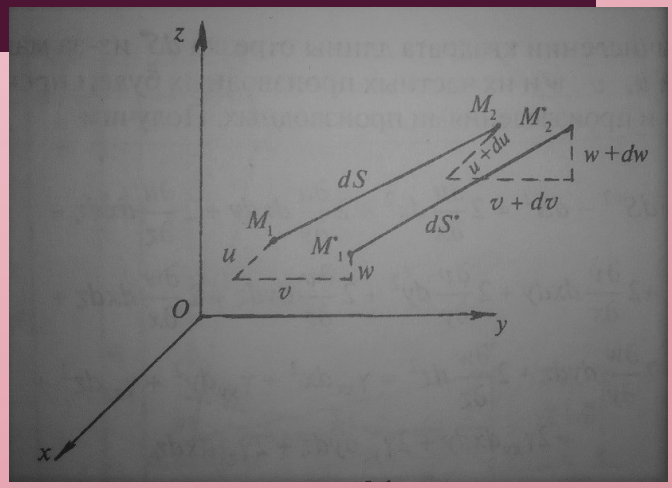
$$dw = \frac{\partial w}{\partial x}dx + \frac{\partial w}{\partial y}dy + \frac{\partial w}{\partial z}dz$$



@KVIHT
Больше материалов по компрессорной технике на сайте научно-инжиниринговой группы «Компрессорная, вакуумная, холодильная техника и системы транспорта и переработки газа» www.kviht.ru, +7 (812) 715-41-64

Доц. Ю.В. Кожухов

ПРОЧНОСТЬ ТУРБОКОМПРЕССОРОВ. РАЗДЕЛ 2. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ДЕФОРМАЦИЙ. СВЯЗЬ МЕЖДУ ПЕРЕМЕЩЕНИЯМИ И ДЕФОРМАЦИЯМИ В ПРЯМОУГОЛЬНОЙ СИСТЕМЕ КООРДИНАТ.



Пусть отрезок $M_1^*M_2^*$ представляет положение отрезка M_1M_2 после деформирования тела. Длину отрезка $M_1^*M_2^*$ обозначим dS*, а его проекции на оси координат – соответственно dx^*, dy^*, dz^*. Считая функции координат u, v, w заданными, определим изменение длины рассматриваемого отрезка вследствие деформирования тела. При этом будем использовать квадраты длин отрезка до и после деформирования, так как они выражаются через квадраты проекций отрезка а оси координат.

$$dS^2 = dx^2dy^2dz^2, \qquad dS^{*2} = dx^{*2}dy^{*2}dz^{*2}$$

Тогда $dS^{*2} - dS^2 = (dx^{*2} - dx^2) + (dy^{*2} - dy^2) + (dz^{*2} - dz^2)$.

Проекции отрезка $M_1^*M_2^*$ на оси координат можно найти как разность соответствующих координат точек M_1^*иM_2^*. Если координаты точки M_1 равны x, y, z, то координаты точки M_2 - $x + dx, y + dy, z + dz$, точки M_1^* - $x + u, y + v, z + w$, точки M_2^* - $x + dx + u + du, y + dy + v + dv, z + dz + w + dw$.

@KVIHT

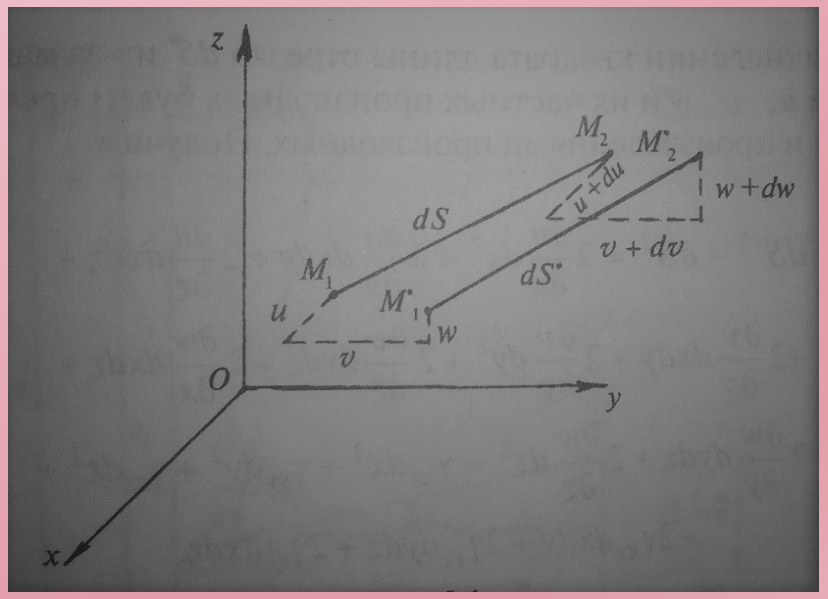
Больше материалов по компрессорной технике на сайте научно-инжиниринговой группы «Компрессорная, вакуумная, холодильная техника и системы транспорта и переработки газа» www.kviht.ru, +7 (812) 715-41-64

Отсюда

$$dx^* = x + dx + u + du - (x + u) = \left(1 + \frac{\partial u}{\partial x}\right) dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{\partial u}{\partial z} dz;$$

$$dy^* = y + dy + v + dv - (y + v) = \frac{\partial v}{\partial x} dx + \left(1 + \frac{\partial v}{\partial y}\right) dy + \frac{\partial v}{\partial z} dz;$$

$$dz^* = z + dz + w + dw - (z + w) = \frac{\partial w}{\partial x} dx + \frac{\partial w}{\partial y} dy + \left(1 + \frac{\partial w}{\partial z}\right) dz.$$



Больше материалов по компрессорной технике на сайте научно-инжиниринговой группы «Компрессорная, вакуумная, холодильная техника и системы транспорта и переработки газа» www.kviht.ru, +7 (812) 715-41-64

Доц. Ю.В. Кожухов

ПРОЧНОСТЬ ТУРБОКОМПРЕССОРОВ. РАЗДЕЛ 2. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ДЕФОРМАЦИЙ. СВЯЗЬ МЕЖДУ ПЕРЕМЕЩЕНИЯМИ И ДЕФОРМАЦИЯМИ В ПРЯМОУГОЛЬНОЙ СИСТЕМЕ КООРДИНАТ.

При вычислении квадрата длины отрезка dS^* из-за малости перемещений u, v, w и их частных производных будем пренебрегать квадратами и произведениями производных. Тогда получим соответственно:

$$
\begin{aligned}
dS^{*2} - dS^2 \approx\ & 2\frac{\partial u}{\partial x}dx^2 + 2\frac{\partial u}{\partial y}dxdy + 2\frac{\partial u}{\partial z}dxdz + \\
& +2\frac{\partial v}{\partial x}dxdy + 2\frac{\partial v}{\partial y}dy^2 + 2\frac{\partial v}{\partial z}dydz + 2\frac{\partial w}{\partial x}dxdz + \\
& +2\frac{\partial w}{\partial y}dydz + 2\frac{\partial w}{\partial z}dz^2 = \gamma_{xx}dx^2 + \gamma_{yy}dy^2 + \gamma_{zz}dz^2 + \\
& +2\gamma_{xy}dxdy + 2\gamma_{yz}dydz + 2\gamma_{zx}dxdz.
\end{aligned}
\qquad (*)
$$

Здесь $\boldsymbol{\gamma_{xx} = 2\frac{\partial u}{\partial x}, \gamma_{yy} = 2\frac{\partial v}{\partial y}, \gamma_{zz} = 2\frac{\partial w}{\partial z}, \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}, \gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}, \gamma_{zx} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}}$

Полученные шесть составляющих полностью характеризуют деформированное состояние тела в окрестности данной точки и называются составляющими тензора деформаций. Всего девять составляющих, но шесть из них попарно равны $\boldsymbol{\gamma_{xy} = \gamma_{yx}, \gamma_{yz} = \gamma_{zy}, \gamma_{zx} = \gamma_{xz}}$. Тензор деформаций имеет вид:

$$\boldsymbol{T_\varepsilon = \begin{vmatrix} \gamma_{xx} & \gamma_{yx} & \gamma_{zx} \\ \gamma_{xy} & \gamma_{yy} & \gamma_{zy} \\ \gamma_{xz} & \gamma_{yz} & \gamma_{zz} \end{vmatrix}}$$

Физический смысл составляющих тензора деформаций

Относительное удлинение отрезка dS равно

$$\varepsilon_S = \frac{dS^* - dS}{dS}$$

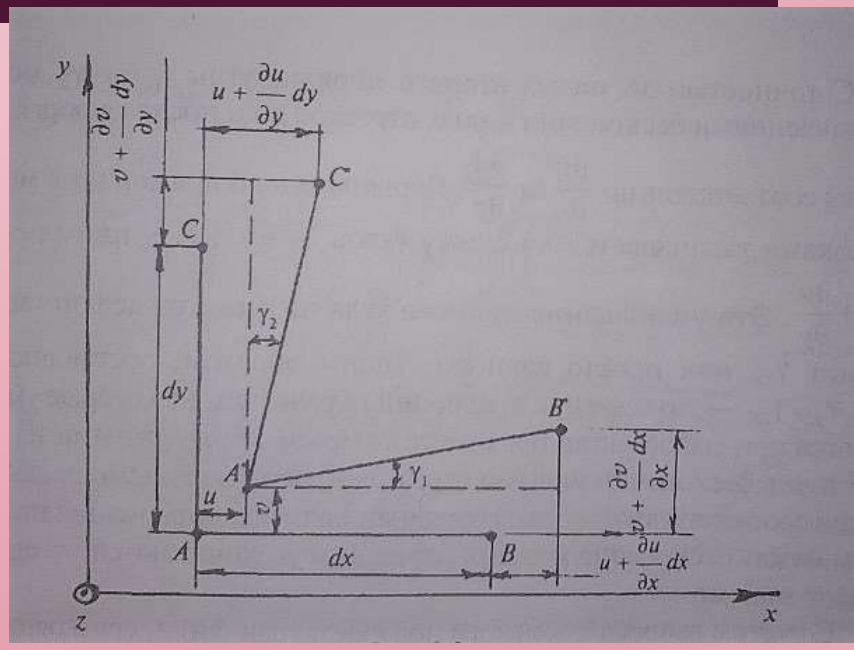
Так как рассматриваются очень малые деформации, то dS* мало отличается от dS и можно представить

$$dS^{*2} - dS^2 \approx 2\varepsilon_S dS^2$$

Больше материалов по компрессорной технике на сайте научно-инжиниринговой группы «Компрессорная, вакуумная, холодильная техника и системы транспорта и переработки газа» www.kviht.ru, +7 (812) 715-41-64

Доц. Ю.В. Кожухов

ПРОЧНОСТЬ ТУРБОКОМПРЕССОРОВ. РАЗДЕЛ 2. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ДЕФОРМАЦИЙ. СВЯЗЬ МЕЖДУ ПЕРЕМЕЩЕНИЯМИ И ДЕФОРМАЦИЯМИ В ПРЯМОУГОЛЬНОЙ СИСТЕМЕ КООРДИНАТ.



Используя это выражение, а так выражение (*) для отрезка, параллельного оси x, проекции которого на оси координат dx, 0, 0, получим $\gamma_{xx} dx^2 = 2\varepsilon_x dx^2$. Отсюда $\boldsymbol{\gamma_{xx} = 2\varepsilon_x}$. Аналогично будет $\boldsymbol{\gamma_{yy} = 2\varepsilon_y, \gamma_{zz} = 2\varepsilon_z}$.

Таким образом, составляющие $\boldsymbol{\gamma_{xx}}$, $\boldsymbol{\gamma_{yy}}$, $\boldsymbol{\gamma_{zz}}$ представляют собой **удвоенные относительные удлинения бесконечно малых отрезков, которые до деформации были параллельны координатным осям**.

Физический смысл составляющих $\boldsymbol{\gamma_{xy}}$ можно установить при рассмотрении углов поворота проекций на плоскость xy отрезков dx и dy, которые до деформации были параллельны соответственно осям x, y. (см. рисунок).

После деформации получаем $\gamma_1 \approx \frac{\partial v}{\partial x}, \gamma_2 \approx \frac{\partial u}{\partial y}$. Первоначально прямой угол между отрезками уменьшается на сумму углов $\gamma_1 + \gamma_2$, т.е. на величину $\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}$. Это уменьшение прямого угла называется деформацией сдвига или просто сдвигом.

Таким образом, составляющие $\boldsymbol{\gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}}$ - **это сдвиги, т.е. величины, на которые уменьшаются при деформации прямые углы между проведенными из данной точки бесконечно малыми отрезками, параллельными до деформации соответствующим осям координат.**

- Уравнения Коши

С учетом вышеизложенного получаем уравнения, связывающие относительные удлинения (линейные деформации) и сдвиги (угловые деформации) с перемещениями, которые называются **уравнениями Коши**:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \qquad \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x},$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \qquad \gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y},$$

$$\varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}, \qquad \gamma_{zx} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}.$$

Тензор деформаций может быть записан в виде:

$$T_\varepsilon = 2\begin{vmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \frac{1}{2}\gamma_{zx} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \varepsilon_y & \frac{1}{2}\gamma_{xy} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xz} & \frac{1}{2}\gamma_{yz} & \varepsilon_z \end{vmatrix}$$

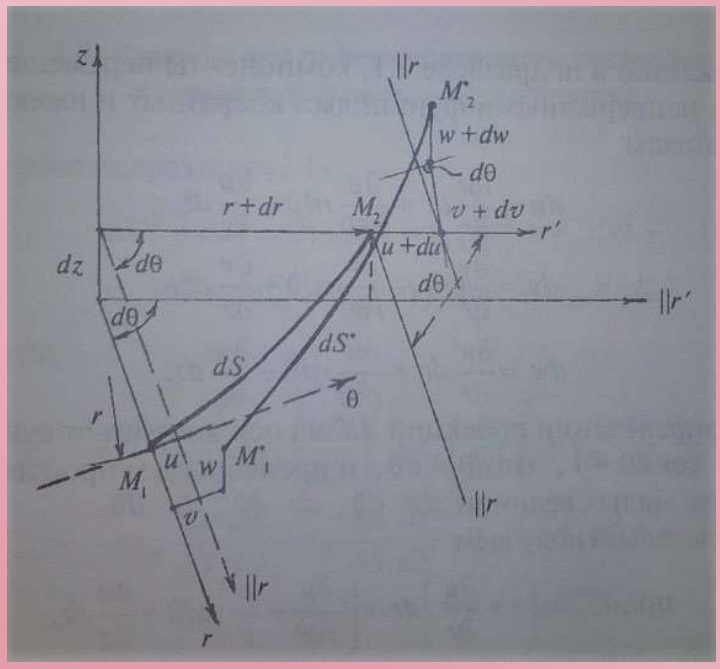
@KVIHT

Больше материалов по компрессорной технике на сайте научно-инжиниринговой группы «Компрессорная, вакуумная, холодильная техника и системы транспорта и переработки газа» www.kviht.ru, +7 (812) 715-41-64

Доц. Ю.В. Кожухов

ПРОЧНОСТЬ ТУРБОКОМПРЕССОРОВ. РАЗДЕЛ 2. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ДЕФОРМАЦИЙ. СВЯЗЬ МЕЖДУ ПЕРЕМЕЩЕНИЯМИ И ДЕФОРМАЦИЯМИ В ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ СИСТЕМЕ КООРДИНАТ

- Связь между перемещениями и деформациями в цилиндрической системе координат



Рассмотрим в цилиндрической системе координат бесконечно малый отрезок *dS,* проекции которого на три взаимно перпендикулярных направления r, θ, z соответственно равны dr, rdθ, dz. Тогда

$$dS^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + dz^2.$$

Изменение квадрата длины этого отрезка до и после деформации согласно (*) можно представить в виде

$$dS^{*2} - dS^2 \approx$$
$$\approx 2\varepsilon_r dr^2 + 2\varepsilon_\theta r^2 d\theta^2 + 2\varepsilon_z dz^2 + 2\gamma_{r\theta} dr \times r d\theta + 2\gamma_{\theta z} r d\theta dz + 2\gamma_{zr} dr dz$$

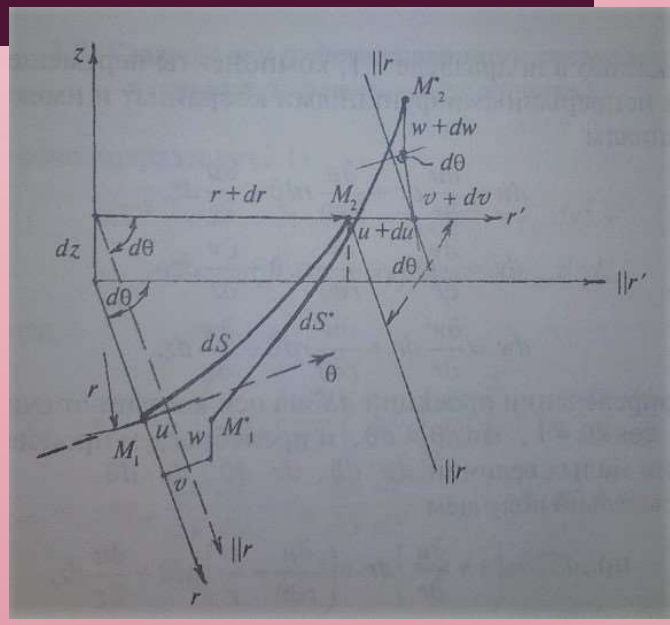
Где $\varepsilon_r, \varepsilon_\theta, \varepsilon_z$ - относительные удлинения бесконечно малых отрезков, которые до деформации параллельны координатным осям r, θ, z; $\gamma_{r\theta}, \gamma_{\theta z}, \gamma_{zr}$ - изменения прямых углов между этими отрезками вследствие деформации.

@KVIHT

Больше материалов по компрессорной технике на сайте научно-инжиниринговой группы «Компрессорная, вакуумная, холодильная техника и системы транспорта и переработки газа» www.kviht.ru, +7 (812) 715-41-64

Доц. Ю.В. Кожухов

ПРОЧНОСТЬ ТУРБОКОМПРЕССОРОВ. РАЗДЕЛ 2. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ДЕФОРМАЦИЙ. СВЯЗЬ МЕЖДУ ПЕРЕМЕЩЕНИЯМИ И ДЕФОРМАЦИЯМИ В ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ СИСТЕМЕ КООРДИНАТ



Квадрат длины отрезка деформации равен суммы квадратов проекций отрезка на оси координат

$$dS^{*2} = (\text{пр.}_r\, dS^*)^2 + (\text{пр.}_\theta\, dS^*)^2 + (\text{пр.}_z\, dS^*)^2$$

Проекции dS* на оси r, θ, z определяются как разности соответствующих координат точек M_2^* и M_1^* (см. рисунок).

$$\text{пр.}_r\, dS^* = (M_2^*)_r - (M_1^*)_r == (r + dr + u + du)cosd\theta - (v + dv)sind\theta - (r + u) \approx dr + du - vd\theta;$$

$$\text{пр.}_\theta\, dS^* = (M_2^*)_\theta - (M_1^*)_\theta = (r + dr + u + du)sind\theta + (v + dv)cosd\theta - v \approx rd\theta + ud\theta + dv;$$

$$\text{пр.}_z\, dS^* = (M_2^*)_z - (M_1^*)_z = dz + w + dw - w = dz + dw$$

Компоненты перемещений принимаются непрерывными функциями координат и имеют полные дифференциалы:

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy + \frac{\partial u}{\partial z}dz$$

$$dv = \frac{\partial v}{\partial x}dx + \frac{\partial v}{\partial y}dy + \frac{\partial v}{\partial z}dz$$

$$dw = \frac{\partial w}{\partial x}dx + \frac{\partial w}{\partial y}dy + \frac{\partial w}{\partial z}dz$$

@KVIHT

Большой материалов по компрессорной технике на сайте научно-инжиниринговой группы «Компрессорная, вакуумная, холодильная техника и системы транспорта и переработки газа» www.kviht.ru, +7 (812) 715-41-64

Доц. Ю.В. Кожухов

ПРОЧНОСТЬ ТУРБОКОМПРЕССОРОВ. РАЗДЕЛ 2. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ДЕФОРМАЦИЙ. СВЯЗЬ МЕЖДУ ПЕРЕМЕЩЕНИЯМИ И ДЕФОРМАЦИЯМИ В ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ СИСТЕМЕ КООРДИНАТ

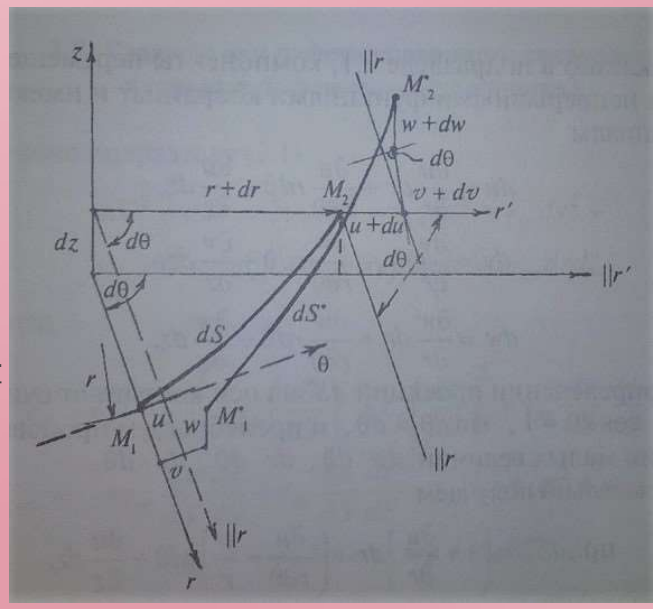
При определении проекций dS* на оси координат считаем, что в пределе $cosd\theta \approx 1, sind\theta \approx d\theta$, и пренебрегаем произведениями бесконечно малых величин $dv * d\theta, dr * d\theta, du * d\theta$.

Окончательно получаем

$$\text{пр.}_r\, dS^* = \left(1 + \frac{\partial u}{\partial r}\right) dr + \left(\frac{\partial u}{r\partial\theta} - \frac{v}{r}\right) r d\theta + \frac{\partial u}{\partial z} dz$$

$$\text{пр.}_\theta\, dS^* = \frac{\partial v}{\partial r} dr + \left(1 + \frac{\partial v}{r\partial\theta} + \frac{u}{r}\right) r d\theta + \frac{\partial v}{\partial z} dz$$

$$\text{пр.}_z\, dS^* = \frac{\partial w}{\partial r} dr + \frac{\partial w}{r\partial\theta} r\partial\theta + \left(1 + \frac{\partial w}{\partial z}\right) dz$$



После математических преобразований получаем **уравнения Коши в цилиндрической системе координат**

$$\boldsymbol{\varepsilon_r = \frac{\partial u}{\partial r}}, \qquad \boldsymbol{\gamma_{r\theta} = \frac{\partial u}{r\partial\theta} + \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r}},$$

$$\boldsymbol{\varepsilon_\theta = \frac{\partial v}{r\partial\theta} + \frac{u}{r}}, \qquad \boldsymbol{\gamma_{\theta z} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{r\partial\theta}},$$

$$\boldsymbol{\varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}}, \qquad \boldsymbol{\gamma_{rz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r}}$$

Больше материалов по компрессорной технике на сайте научно-инжиниринговой группы «Компрессорная, вакуумная, холодильная техника и системы транспорта и переработки газа» www.kviht.ru, +7 (812) 715-41-64

@KVIHT

- Главные оси деформированного состояния и главные деформации

Когда речь шла о теории напряжения говорилось, что для центральной поверхности второго порядка можно выбрать такие перпендикулярные оси координат, для которых обращаются в нуль, слагаемые, содержащие произведение координат в уравнении поверхности второго порядка

$$\pm k^2 = \varepsilon_x x^2 + \varepsilon_y y^2 + \varepsilon_z z^2 + \gamma_{xy} xy + \gamma_{yz} yz + \gamma_{zx} xz$$

Такие оси называются **главными осями деформаций**. По этим направлениям тело испытывает только линейные деформации (удлинения или укорочения), а деформации сдвига равны нулю. Линейные деформации в направлении главных осей называются **главными деформациями**. Главные оси деформация остаются перпендикулярными друг другу и после деформации, а прямоугольный параллелепипед с ребрами, перпендикулярными лавным осям деформаций, остается также прямоугольным параллелепипедом после деформаций.

Для вывода уравнений, определяющих направления главных осей деформаций, рассмотрим бесконечно малый объем dV_1 упругого тела, деформированное состояние которого характеризуется составляющими $\gamma_{xx}, \gamma_{yy}, \gamma_{zz}, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}$, и бесконечно малый объем dV_2 другого упругого тела, напряженное состояние которого характеризуется составляющими $\tau_{xx}, \tau_{yy}, \tau_{zz}, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}$. Будем изменять нагрузки, действующие на второе тело, таким образом, чтобы составляющие тензора напряжений в объеме dV_2 стали пропорциональны составляющим тензора деформаций в объеме dV_1. Получим:

$$\tau_{xx} = k\gamma_{xx}, \tau_{yy} = k\gamma_{yy}, \tau_{zz} = k\gamma_{zz}, \tau_{xy} = k\gamma_{xy}, \tau_{yz} = k\gamma_{yz}, \tau_{zx} = k\gamma_{zx} \qquad (**)$$

Здесь k – произвольно выбранный коэффициент пропорциональности.

 РАЗДЕЛ 2. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ДЕФОРМАЦИЙ. ГЛАВНЫЕ ОСИ ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ И ГЛАВНЫЕ ДЕФОРМАЦИИ (УДЛИНЕНИЯ)

Составляющие тензоров напряжений и деформаций подчиняются линейному преобразованию пр переходе от одной системы координат к другой. Тогда соотношения (**) будут справедливы при изменении системы координат. Если выбрать систему координат, составленную главными осями 1,2,3 напряженного состояние бесконечно малого элемента dV_2 и деформаций в объеме dV_1 получим соотношения

$$k\gamma_{11} = \tau_{11} = \sigma_1, k\gamma_{22} = \tau_{22} = \sigma_2, k\gamma_{33} = \tau + 33 = \sigma_3, k\gamma_{12} = \tau_{12} = 0, k\gamma_{23} = \tau_{23} = 0, k\gamma_{31} = \tau_{31} = 0.$$

Эти соотношения показывают, что главные оси напряженного и деформированного состояний для изотропных состояний совпадает. Относительные удлинения в направлении главных осей деформированного состояния называются **<u>главными удлинениями</u> и обозначаются** $\boldsymbol{\varepsilon_n = \frac{1}{2}\gamma_{nn}\ (n = 1, 2, 3)}$.

В общем форме

$$\boldsymbol{\sigma_n = k\gamma_{nn}\ (n = 1, 2, 3)}. \qquad (***)$$

Используя выражения (**) и (***) получим систему уравнений, которая определяет косинусы углов между главными осями деформиров[illegible] состояния и осями координат x,y,z и величину главных удлинений:

@KVIHT
Больше материалов по компрессорной технике на сайте научно-инжиниринговой группы «Компрессорная, вакуумная, холодильная техника и системы транспорта и переработки газа» www.kviht.ru, +7 (812) 715-41-64

$$(\gamma_{xx} - \gamma_{nn})\cos(n,x) + \gamma_{yx} cos(n,y) + \gamma_{zx}\cos(n,z) = 0,$$
$$\gamma_{xy}\cos(n,x) + \left(\gamma_{yy} - \gamma_{nn}\right)\cos(n,y) + \gamma_{zy}\cos(n,x) = 0,$$
$$\gamma_{xz}\cos(n,x) + \gamma_{yz}\cos(n,y) + (\gamma_{zz} - \gamma_{nn})\cos(n,z) = 0,$$
$$\cos^2(n,x) + \cos^2(n,y) + \cos^2(n,z) = 1.$$

Из условия равенства нулю определителя систем выводится **характеристическое уравнение деформированного состояния**

$$\boldsymbol{\varepsilon_n^3 - J_1\varepsilon_n^2 + J_2\varepsilon_n - J_3 = 0},$$

где

$$\boldsymbol{J_1 = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z},$$
$$\boldsymbol{J_2 = \varepsilon_x\varepsilon_y + \varepsilon_y\varepsilon_z + \varepsilon_z\varepsilon_x - \frac{1}{4}\left(\gamma_{xy}^2 + \gamma_{yz}^2 + \gamma_{zx}^2\right)},$$
$$\boldsymbol{J_3 = \varepsilon_x\varepsilon_y\varepsilon_z + \frac{1}{4}\gamma_{xy}\gamma_{yz}\gamma_{zx} - \frac{1}{4}\left(\varepsilon_x\gamma_{yz}^2 + \varepsilon_y\gamma_{zx}^2 + \varepsilon_z\gamma_{xy}^2\right)}$$

Составляющую J_3 характеристического состояния можно также записать в виде тензора

$$J_3 = \begin{vmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \frac{1}{2}\gamma_{zx} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \varepsilon_y & \frac{1}{2}\gamma_{zy} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xz} & \frac{1}{2}\gamma_{yz} & \varepsilon_z \end{vmatrix}$$

Так как характеристическое уравнение кубическое, то оно дает три решения – три главных удлинения $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$, при этом $\varepsilon_1 > \varepsilon_2 > \varepsilon_3$.

Для главных осей деформированного состояния

$$J_1 = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3, \qquad J_2 = \varepsilon_1\varepsilon_2 + \varepsilon_2\varepsilon_3 + \varepsilon_3\varepsilon_1, \qquad J_3 = \varepsilon_1\varepsilon_{2_3}$$

Коэффициенты характеристического уравнения называются **инвариантами деформированного состояния** и не зависят от выборе осей координат.

Физический смысл первого инварианта деформированного состояния J_1

Он представляет собой **относительное изменение объема** тела вследствие деформации (относительное объемное расширение)

$$\vartheta = \frac{dV^* - dV}{dV} \approx \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = J_1, \qquad \text{где } dV, dV^* - \text{объемы тела до и после деформации.}$$

Больше материалов по компрессорной технике на сайте научно-инжиниринговой группы «Компрессорная, вакуумная, холодильная техника и системы транспорта и переработки газа» www.kviht.ru, +7 (812) 715-41-64

- Уравнение совместности деформаций

Пусть заданы компоненты перемещений u, v, w, как непрерывные функции координат. По ним легко определяются соответствующие шесть компонент деформаций по формулами Коши (см. слайд 9). Однако если заданы шесть компонент деформаций как функций координат, то заранее нельзя утверждать, что им соответствует непрерывное поле перемещений. Деформации, которым отвечает непрерывное поле перемещений, называются **совместными деформациями.**

Для того, чтобы деформации были совместными, они должны быть связаны некоторыми соотношениями, которые называются **уравнениями совместности деформаций**. Также эти уравнения называются уравнения сплошности или неразрывности.

Для того, чтобы тело оставалось сплошным односвязным после деформации, перемещения должны быть непрерывными функциями координат и иметь полный дифференциал.

Будем выводить уравнения совместности, вычисляя компоненты перемещений через деформации.

$$u = \int du + C = \int \left(\frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy + \frac{\partial u}{\partial z}dz\right) + C$$

@KVIHT
Больше материалов по компрессорной технике на сайте научно-инжиниринговой группы «Компрессорная, вакуумная, холодильная техника и системы транспорта и переработки газа» www.kviht.ru, +7 (812) 715-41-64

$$u = \int du + C = \int (\frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{\partial u}{\partial z} dz) + C$$

Здесь $\frac{\partial u}{\partial x} = \varepsilon_x$, а производные $\frac{\partial u}{\partial y}$ и $\frac{\partial u}{\partial z}$ не могут быть непосредственно выражены через деформации, так как $\frac{\partial u}{\partial y} = \gamma_{xy} - \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial z} = \gamma_{zx} - \frac{\partial w}{\partial x}$

Считаем, что не только компоненты перемещен, но и их частные производные являются непрерывными функциями координат и имеют полный дифференциал, т.е. $\frac{\partial u}{\partial y} = F(x, y, z), \frac{\partial u}{\partial z} = F_1(x, y, z)$ и $dF = \frac{\partial F}{\partial x} dx + \frac{\partial F}{\partial y} dy + \frac{\partial F}{\partial z} dz, dF_1 = \frac{\partial F_1}{\partial x} dx + \frac{\partial F_1}{\partial y} dy + \frac{\partial F_1}{\partial z} dz.$

Используя условия Коши-Римана о равенстве крест-накрест взятых вторых производных, выразим производные $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right), \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right), \frac{\partial}{\partial z}(\frac{\partial u}{\partial y})$ через деформации:

@KVIHT

Больше материалов по компрессорной технике на сайте научно-инжиниринговой группы «Компрессорная, вакуумная, холодильная техника и системы транспорта и переработки газа» www.kviht.ru, +7 (812) 715-41-64

В итоге получаем:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)=\frac{\partial \varepsilon_x}{\partial y},$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)=\frac{\partial}{\partial y}\left(\gamma_{xy}-\frac{\partial v}{\partial x}\right)=\frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial y}-\frac{\partial \varepsilon_y}{\partial x},$$

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)=\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial z}\left(\gamma_{xy}-\frac{\partial v}{\partial x}\right)+\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z}-\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)+\frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y}-\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)\right]=$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z}+\frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y}-\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x}\right].$$

Теперь можно определить производную $\frac{\partial u}{\partial y}$ через деформации

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\int\frac{\partial F}{\partial y}dx+\frac{\partial F}{\partial y}dy+\frac{\partial F}{\partial z}dz)+C_1.$$

Аналогично можно выразить через деформации производные $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right),\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right),\frac{\partial}{\partial z}(\frac{\partial u}{\partial z})$ и определить

$$\frac{\partial u}{\partial z}=\int(\frac{\partial F_1}{\partial x}dx+\frac{\partial F_1}{\partial y}dy+\frac{\partial F_1}{\partial z}dz)+C_2$$

Так как функция $\frac{\partial u}{\partial y} = F(x, y, z)$ имеет полный дифференциал, то для нее также должны выполняться условия Коши-Римана:

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right), \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial F}{\partial z}\right), \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F}{\partial z}\right) = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)$$

После преобразования этих уравнений получаем уравнения совместности деформаций. При определении производной $\frac{\partial u}{\partial z}$ получим ещё три уравнения, а при нахождении компонент перемещения **v** и **w** – ещё двенадцать уравнений. Итого 18 уравнений, из которых только шесть оказываются различными. Эти уравнения и составляют искомые уравнения совместности деформаций, называемые зависимостями (уравнениями) Сен-Венана.

@KVIHT

Больше материалов по компрессорной технике на сайте научно-инжиниринговой группы «Компрессорная, вакуумная, холодильная техника и системы транспорта и переработки газа» www.kviht.ru, +7 (812) 715-41-64

Доц. Ю.В. Кожухов

ПРОЧНОСТЬ ТУРБОКОМПРЕССОРОВ. РАЗДЕЛ 2. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ДЕФОРМАЦИЙ. УРАВНЕНИЯ СОВМЕСТНОСТИ ДЕФОРМАЦИЙ.

Зависимости (уравнения) Сен-Венана:

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y},$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial y \partial z},$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{zx}}{\partial x \partial y},$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y \partial z} = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} - \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x}\right),$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x y} = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} - \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z}\right).$$

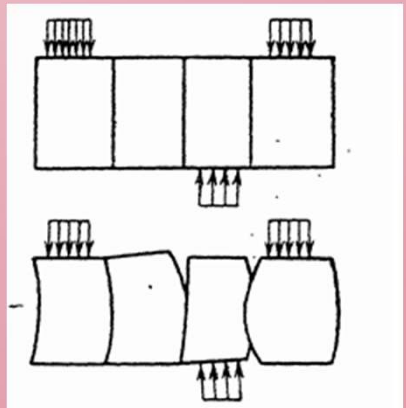


Рис. 3.10. Деформированное состояние тела при нарушении условий совместности деформаций

Больше материалов по компрессорной технике на сайте научно-инжиниринговой группы «Компрессорная, вакуумная, холодильная техника и системы транспорта и переработки газа» www.kviht.ru, +7 (812) 715-41-64

Физический смысл

В деформированном состоянии все элементы должны образовывать единое целое. Если условия совместности деформаций нарушаются, то из отдельных элементов нельзя составить тело без разрывов и пустот .