KVIHT.RU
+7 (812) 715-41-64

@KVIHT

ПРОЧНОСТЬ ТУРБОКОМПРЕССОРОВ

Курс лекций.

Доцент, кандидат технических наук

Юрий Владимирович Кожухов

www.kviht.ru

Научно-инжиниринговая группа «Компрессорная, вакуумная, холодильная техника и системы транспорта и переработки газа»

Доц. Ю.В. Кожухов

ПРОЧНОСТЬ ТУРБОКОМПРЕССОРОВ. *Лекция 1.*

СОДЕРЖАНИЕ

- **Введение**
- **Задачи курса**
- **Литература.**
- **Раздел 1. Элементы теории напряжений.**

1. ***Понятие силы и напряжений***
2. ***Напряжения на площадках, перпендикулярным координатным осям***
3. ***Напряжения на произвольно ориентированных площадках***
4. ***Главные оси напряженного состояния и главные напряжения***
5. ***Дифференциальные уравнения равновесия в прямоугольной и цилиндрической системах координат.***

@KVIHT

Больше материалов по компрессорной технике на сайте научно-инжиниринговой группы «Компрессорная, вакуумная, холодильная техника и системы транспорта и переработки газа» www.kviht.ru, +7 (812) 715-41-64

Доц. Ю.В. Кожухов

ПРОЧНОСТЬ ТУРБОКОМПРЕССОРОВ.

ВВЕДЕНИЕ

Детали турбокомпрессоров испытывают силовые и тепловые воздействия, которые могут быть стационарными и изменяющимися во времени. При разработке энергетических машин инженер должен выбирать материалы и размеры деталей таким образом, чтобы они обеспечили надежную работу конструкции, которая подвержена силовым и тепловым нагрузкам.

Для расчета напряжений и деформаций в деталях используются уравнения, основанные на физических законах деформирования материалов в упругом состоянии. При напряжениях, превышающих предел упругости, необходимо рассматривать пластическое деформирование, а при высоких температурах – и явление ползучести. Изменяющиеся по времени нагрузки, приводящие к циклическому деформированию, вызывают необходимость проводить расчеты на усталостную прочность.

@KVIHT

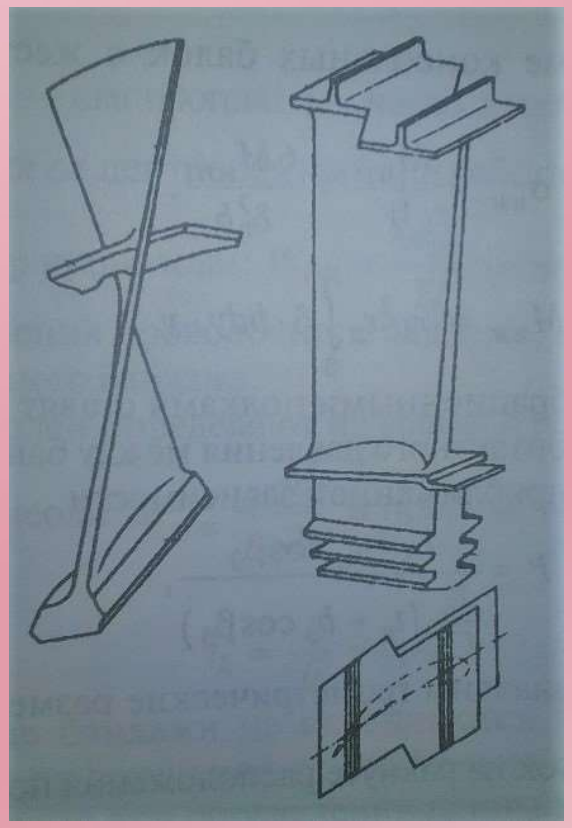
Больше материалов по компрессорной технике на сайте научно-инжиниринговой группы «Компрессорная, вакуумная, холодильная техника и системы транспорта и переработки газа» www.kviht.ru, +7 (812) 715-41-64

Доц. Ю.В. Кожухов

ПРОЧНОСТЬ ТУРБОКОМПРЕССОРОВ.

ЗАДАЧИ КУРСА.

- В данном курсе рассматриваются теоретические основы статической прочности деталей компрессоров и турбин, а также способы оценки прочности деталей при однократном и малоцикловом нагружении.
- Кратко изучаются элементы теорий напряжений и деформаций, основы методов определения напряжений, деформаций и перемещений в пределах упругой области, элементы термоупругости и теорий пластичности и ползучести, теоретические основы и схемы инженерных расчетов напряжений и деформаций в деталях компрессоров и турбин (корпусов, дисков, диафрагм и лопаток).



@KVIHT

Больше материалов по компрессорной технике на сайте научно-инжиниринговой группы «Компрессорная, вакуумная, холодильная техника и системы транспорта и переработки газа» www.kviht.ru, +7 (812) 715-41-64

Доц. Ю.В. Кожухов

ПРОЧНОСТЬ ТУРБОКОМПРЕССОРОВ. ЛИТЕРАТУРА.

Основная

1. Теория и расчет турбокомпрессоров (учебное пособие для студентов ВУЗов). Селезнев К.П., Галеркин Ю.Б., Анисимов С.А. и др. Под общей редакцией К.П. Селезнева - Л.: Машиностроение. 1986 - 392 с.

2. Динамика и прочность энергетических машин. Теоретические основы статической прочности турбокомпрессоров и турбин. Зуев А.В., Стрижак Л.Я. СПб: Издательство Политехнического университета. 2008 г. – 213 с.

@KVIHT

Больше материалов по компрессорной технике на сайте научно-инжиниринговой группы «Компрессорная, вакуумная, холодильная техника и системы транспорта и переработки газа» www.kviht.ru, +7 (812) 715-41-64

Дополнительная

1. Сопротивление материалов. П.А.Павлов, Л.К.Паршин, Б.Е.Мельников, В.А.Шерстнев. Учебное пособие.
2. Расчет на прочность деталей машин. Биргер И.А. 3-е издание – М.: Машиностроение. 1979. – 702 с.

@KVIHT

Больше материалов по компрессорной технике на сайте научно-инжиниринговой группы «Компрессорная, вакуумная, холодильная техника и системы транспорта и переработки газа» www.kviht.ru, +7 (812) 715-41-64

- Понятие сил и напряжений.

В задачах о прочности в общем случае на тело могут действовать заданные нагрузки и могут быть наложены некоторые механические связи, которые заменяются силами. **Заданные нагрузки и силы механического взаимодействия тел называются внешними силами**, которые подразделяются на два типа: поверхностные и объемные силы.

Поверхностные силы – силы, распределенные по поверхности тела. К ним причисляют силы давления рабочей среды (сила давлений газа на лопатки турбомашин), силы трения и др. Интенсивность поверхностных сил выражают в Н/м^2 (или Па).

Объемные (массовые) силы – силы, распределенные по всему объему тела. К объемным силам относят силу тяжести, инерционные силы, силы электромагнитного происхождения. Интенсивность объемных сил выражают в Н/м^3 .

@KVIHT

Больше материалов по компрессорной технике на сайте научно-инжиниринговой группы «Компрессорная, вакуумная, холодильная техника и системы транспорта и переработки газа» www.kviht.ru, +7 (812) 715-41-64

Пусть интенсивность поверхностной силы, действующей на площадке с нормалью n, будем обозначать Fn. В прямоугольной системе координат x,y,z составляющие поверхностной силы, параллельные осям координат, обозначим Fnx, Fny, Fnz. Тогда вектор поверхностной силы Fn будет равен векторной сумме её составляющих:

$$\boldsymbol{F_n = F_{nx} + F_{ny} + F_{nz}}$$

а модуль поверхностной силы:

$$\boldsymbol{F_n = \sqrt{{F_{nx}}^2 + {F_{ny}}^2 + {F_{nz}}^2}}$$

В цилиндрической системе координат r, θ, z соответствующие составляющие поверхностной силы обозначаются $\boldsymbol{F_{nr}, F_{n\theta}, F_{nz}}$. Тогда вектор поверхностной силы в цилиндрической системе координат определяется выражением:

$$\boldsymbol{F_n = F_{nr} + F_{n\theta} + F_{nz}}$$

@KVIHT

Больше материалов по компрессорной технике на сайте научно-инжиниринговой группы «Компрессорная, вакуумная, холодильная техника и системы транспорта и переработки газа» www.kviht.ru, +7 (812) 715-41-64

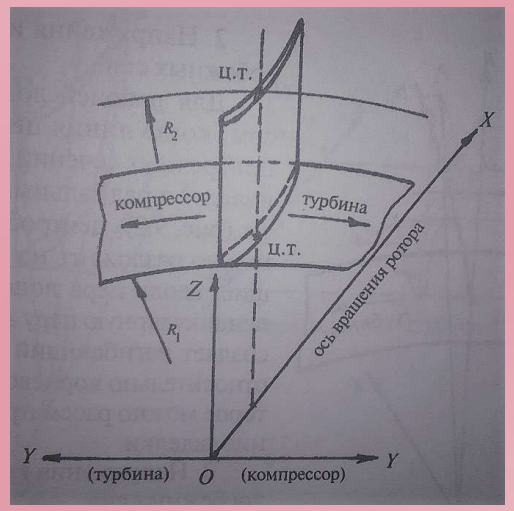
Объемные (массовые) силы распределены по всему объёму (массе) тела. Интенсивность объемных сил обозначим K, а её составляющие, параллельные осям координат, соответственно $\mathbf{K_x}$, $\mathbf{K_y}$, $\mathbf{K_z}$ и $\mathbf{K_r}$, $\mathbf{K_\theta}$, $\mathbf{K_z}$

Тогда вектор объемной силы:

$$K = K_x + K_y + K_z$$

$$K = K_r + K_\theta + K_z$$

соответственно в прямоугольной и цилиндрической системах координат.



@KVIHT

Больше материалов по компрессорной технике на сайте научно-инжиниринговой группы «Компрессорная, вакуумная, холодильная техника и системы транспорта и переработки газа» www.kviht.ru, +7 (812) 715-41-64

Доц. Ю.В. Кожухов

ПРОЧНОСТЬ ТУРБОКОМПРЕССОРОВ. РАЗДЕЛ 1. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ НАПРЯЖЕНИЙ. ПОНЯТИЕ СИЛЫ И НАПРЯЖЕНИЙ. НАПРЯЖЕНИЯ НА ПЛОЩАДКАХ, ПЕРПЕНДИКУЛЯРНЫМ КООРДИНАТНЫМ ОСЯМ.

Представим, что на тело действуют внешние силы. Тогда под их воздействием в этом теле возникнут внутренние силы взаимодействия между его частями. Величина этих сил определяется их интенсивностью – отношением силы к площади, на которую она действует.

Напряжение – интенсивность сил, характеризующих внутреннее взаимодействие между частями тела. Напряжение выражается в Н/м^2 (Па).

Пусть имеется некая площадка δF с нормалью n. Вектор полного напряжения, действующего на этой площадке обозначим как τ_n. Ориентацию площадки в пространстве характеризуем углами наклона нормали *n* к координатным осям, например, *x,y,z* – (n ˆ, x), (n ˆ, y), (n ˆ, z). В общем случае вектор полного напряжения $\boldsymbol{\tau_n}$ не совпадает с нормалью n и может быть представлен в виде двух составляющих, направленных по нормали к площадке (нормальное напряжение) и по касательной к площадке (касательное напряжение). Нормальное напряжение обозначим $\boldsymbol{\sigma_n}$, касательное – $\boldsymbol{\tau}$. Тогда вектор полного напряжения $\boldsymbol{\tau_n} = \boldsymbol{\sigma_n} + \boldsymbol{\tau}$, а модуль полного напряжения $\boldsymbol{\tau_n} = \sqrt{\boldsymbol{\sigma_n}^2 + \boldsymbol{\tau}^2}$.

@KVIHT

Больше материалов по компрессорной технике на сайте научно-инжиниринговой группы «Компрессорная, вакуумная, холодильная техника и системы транспорта и переработки газа» www.kviht.ru, +7 (812) 715-41-64

Вектор главного напряжения также может быть разложен на составляющие, параллельные осям координат:

$$\boldsymbol{\tau}_n = \boldsymbol{\tau}_{nx} + \boldsymbol{\tau}_{ny} + \boldsymbol{\tau}_{nz}$$

На площадках, перпендикулярных координатным осям, например осям x,y,z, полное напряжение также можно разложить на составляющие, параллельные осям координат:

$$\boldsymbol{\tau}_x = \boldsymbol{\tau}_{xx} + \boldsymbol{\tau}_{xy} + \boldsymbol{\tau}_{xz}, \qquad \boldsymbol{\tau}_y = \boldsymbol{\tau}_{yx} + \boldsymbol{\tau}_{yy} + \boldsymbol{\tau}_{yz}, \qquad \boldsymbol{\tau}_z = \boldsymbol{\tau}_{zx} + \boldsymbol{\tau}_{zy} + \boldsymbol{\tau}_{zz}$$

Первый индекс в обозначениях напряжений указывает ость, параллельно которой направлена внешняя нормаль к площадке, второй индекс – ось, параллельно которой направлена составляющая напряжения, т.е. первый индекс указывает площадку, на которой действует напряжений, а второй – его направление. Так как в обозначениях нормальных напряжений используются два одинаковых индекса, то принято оставлять только один из них и заменять

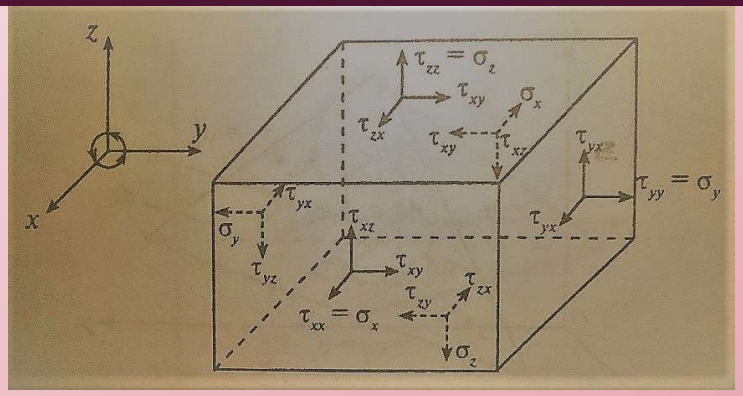
$$\boldsymbol{\tau}_{xx} = \boldsymbol{\sigma}_x, \qquad \boldsymbol{\tau}_{yy} = \boldsymbol{\sigma}_y, \qquad \boldsymbol{\tau}_{zz} = \boldsymbol{\sigma}_z$$

Составляющие напряжений с двумя разными индексами являются касательными напряжениями.

Больше материалов по компрессорной технике на сайте научно-инжиниринговой группы «Компрессорная, вакуумная, холодильная техника и системы транспорта и переработки газа» www.kviht.ru, +7 (812) 715-41-64

Доц. Ю.В. Кожухов

ПРОЧНОСТЬ ТУРБОКОМПРЕССОРОВ. РАЗДЕЛ 1. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ НАПРЯЖЕНИЙ. ПОНЯТИЕ СИЛЫ И НАПРЯЖЕНИЙ. НАПРЯЖЕНИЯ НА ПЛОЩАДКАХ, ПЕРПЕНДИКУЛЯРНЫМ КООРДИНАТНЫМ ОСЯМ.



На рисунке показаны положительные направления напряжений на гранях параллелепипеда. При нагружении тел до напряжений, не превышающих предел упругости, рассматриваются идеально-упругие тела.

Идеально-упругие тела – тела, которые восстанавливают свои первоначальную форму и размеры после снятия нагрузки. Материал тела является однородным, что предполагает одинаковые механические свойства в любой точке тела, и непрерывно распределен во всему объёму, т.е. представляет собой сплошную среду. Материал таких тел также является изотропным, следовательно, механические свойства в каждой точке одинаковы во всех направлениях.

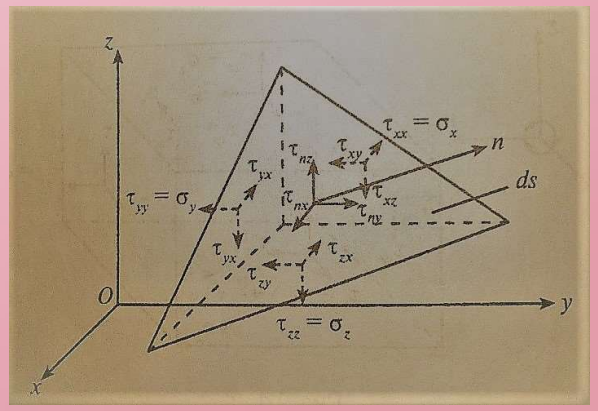
@KVIHT

Больше материалов по компрессорной технике на сайте научно-инжиниринговой группы «Компрессорная, вакуумная, холодильная техника и системы транспорта и переработки газа» www.kviht.ru, +7 (812) 715-41-64

Доц. Ю.В. Кожухов

ПРОЧНОСТЬ ТУРБОКОМПРЕССОРОВ. РАЗДЕЛ 1. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ НАПРЯЖЕНИЙ. НАПРЯЖЕНИЯ НА ПРОИЗВОЛЬНО ОРИЕНТИРОВАННЫХ ПЛОЩАДКАХ.

- **Связь напряжений на произвольно ориентированных площадках с напряжениями на площадках, перпендикулярных координатным осям.**



Пусть имеется прямоугольная система координат x, y, z, в которой находится элементарный тетраэдр в положении равновесия. Тетраэдр расположен так, что три его грани параллельны координатным осям, а перпендикуляр n к четвертой грани составляет с осями координат некие углы (n^x), (n^y), (n^z).

dx, dy и dz – длины ребер тетраэдра, параллельных осям координат. Считаем элемент настолько малым, что изменением напряжений на его гранях можно пренебречь. Тогда равнодействующие поверхностных сил, действующих на гранях элемента, можно считать приложенными в центре тяжести граней и определять как произведение соответствующих напряжений на площадь грани. Эти силы имеют второй порядок малости относительно dx, dy, dz, как и площадей граней.

Составляющие объемной силы, действующей на тетраэдр, равны $K_x dV$, $K_y dV$, $K_z dV$, где объем элементарного тетраэдра $dV = \frac{1}{6} dxdydz$. Таким образом, эти составляющие имеют третий порядок малости относительно dx, dy, dz и ими можно пренебречь по сравнению с поверхностными силами.

@KVIHT

Больше материалов по компрессорной технике на сайте научно-инжиниринговой группы «Компрессорная, вакуумная, холодильная техника и системы транспорта и переработки газа» www.kviht.ru, +7 (812) 715-41-64

Тогда уравнение равновесия в проекции на ось **x** запишется в виде

$$\tau_{nx}ds - \tau_{xx}\frac{1}{2}dydz - \tau_{yx}\frac{1}{2}dxdz - \tau_{zx}\frac{1}{2}dxdy = 0$$

Аналогичные уравнение можно написать для проекций сил на оси **y, z.**

Теорема о площади проекции плоской фигуры гласит: Площадь ортогональной проекции плоской фигуры на плоскость есть произведение площади самой фигуры на косинус угла между плоскостью фигуры и плоскостью проекции. Согласно этой теореме:

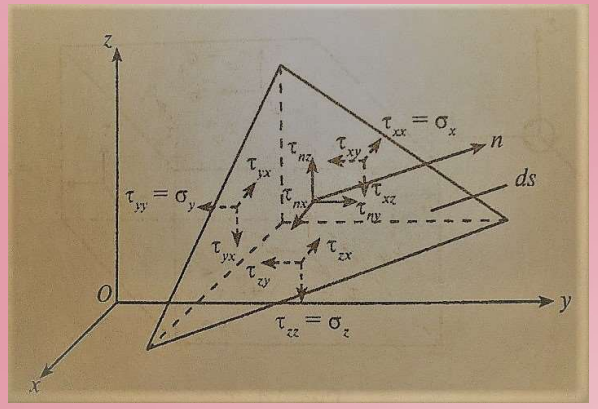
$$\frac{1}{2}dydz = dS\cos(n,x), \qquad \frac{1}{2}dxdz = dS\cos(n,y), \qquad \frac{1}{2}dxdy = dS\cos(n,z)$$

В результате математических преобразований получим следующие уравнения:

$$\tau_{nx} = \tau_{xx}\cos(n,x) + \tau_{yx}\cos(n,y) + \tau_{zx}\cos(n,z),$$

$$\tau_{ny} = \tau_{xy}\cos(n,x) + \tau_{yy}\cos(n,y) + \tau_{zy}\cos(n,z),$$

$$\tau_{nz} = \tau_{xz}\cos(n,x) + \tau_{yz}\cos(n,y) + \tau_{zz}\cos(n,z).$$



Эта система уравнений называется *соотношения Коши*.

@KVIHT

Больше материалов по компрессорной технике на сайте научно-инжиниринговой группы «Компрессорная, вакуумная, холодильная техника и системы транспорта и переработки газа» www.kviht.ru, +7 (812) 715-41-64

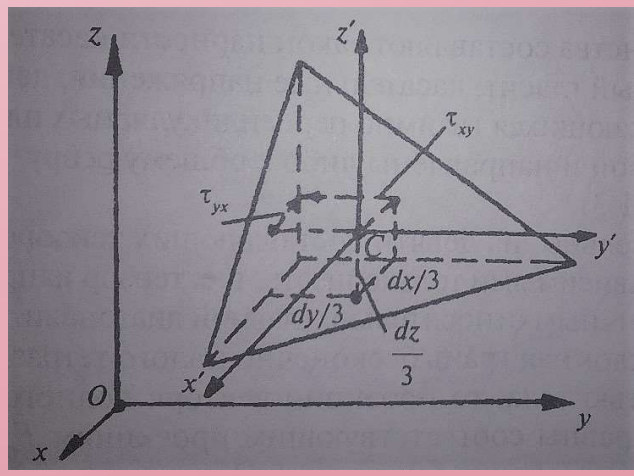
- **Тензор напряжений**

Напряженное состояние в точке определяется 9 величинами и представляет собой тензор второго ранга или просто тензор. Обычно его представляют в виде матрицы:

$$\mathrm{T}_{\sigma} = \begin{vmatrix} \tau_{xx} \tau_{yx} \tau_{zx} \\ \tau_{xy} \tau_{yy} \tau_{zy} \\ \tau_{xz} \tau_{yz} \tau_{zz} \end{vmatrix}$$

С физической точки зрения тензор напряжений представляет собой совокупность напряжений в некоторой точке тела и определяется внешней нагрузкой, размерами, формой и материалом тела, которые не зависят от выбора системы координат. Таким образом, тензор напряжений инвариантен к выбору системы координат.

@KVIHT
Больше материалов по компрессорной технике на сайте научно-инжиниринговой группы «Компрессорная, вакуумная, холодильная техника и системы транспорта и переработки газа» www.kviht.ru, +7 (812) 715-41-64



- **Закон парности касательных напряжений**

Рассмотрим условие равновесия элемента для моментов сил, действующих на гранях тетраэдра, относительно осей, проведенных через центр тяжести тетраэдра параллельно координатным осям.

Уравнение моментов сил относительно оси z′

$$\tau_{xy}\frac{1}{2}dydz\frac{dx}{3}-\tau_{yx}\frac{1}{2}dxdz\frac{dy}{3}=0$$

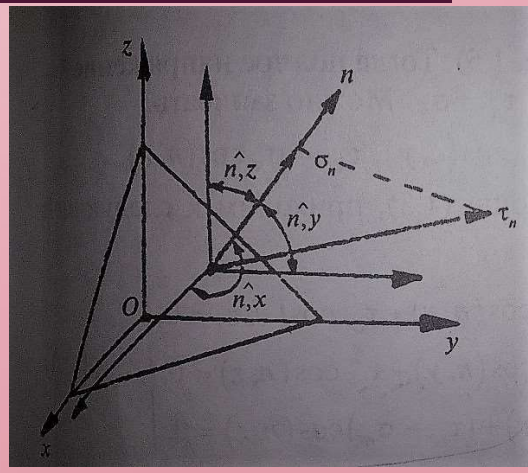
Подобным образом можно записать уравнения моментов сил относительно осей x′, y′. В результате получим

$$\tau_{xy}=\tau_{yx} \qquad \tau_{yz}=\tau_{zy} \qquad \tau_{zx}=\tau_{xz}$$

Эти равенства составляют закон парности касательных напряжений, который гласит: касательные напряжения, действующие на двух соприкасающихся взаимно перпендикулярных площадках, равны между собой и направлены либо к общему ребру, либо от ребра.

@KVIHT
Больше материалов по компрессорной технике на сайте научно-инжиниринговой группы «Компрессорная, вакуумная, холодильная техника и системы транспорта и переработки газа» www.kviht.ru, +7 (812) 715-41-64

- **Главные оси напряженного состояния и главные напряжения**



Из аналитической геометрии следует, что можно найти три такие перпендикулярные площадки, на которых касательные напряжения τ_{xy}, τ_{yz}, τ_{zx} обращаются в нуль. На этих площадках полные напряжения будут направлены по нормали к площадкам. Такие напряжения называются **главными напряжениями**, их направления – **главными осями (главными направлениями) напряженного состояния**, а площадки, на которых действуют главные напряжения – **главными площадками**. В порядке убывания главные напряжения обозначают σ_1 σ_2 σ_3.

Главные напряжения могут быть определены по заданному тензору напряжений в произвольной системе координат, например, в прямоугольной системе координат x,y,z. Используем то положение, что главные напряжения перпендикулярны к площадкам, на которых они действуют. Пусть в системе координат x,y,z наклонная площадка является главной. Тогда полное напряжение будет направлено по нормали, т.е. $\tau_n = \sigma_n$.

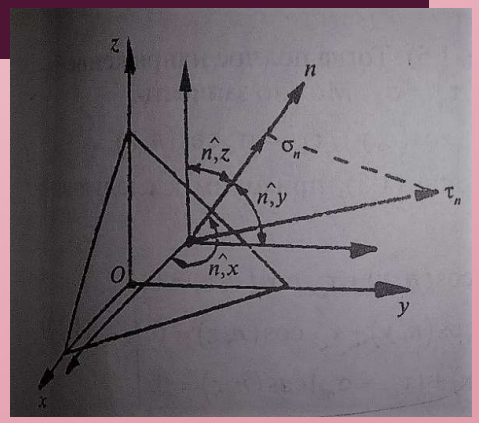
$$\tau_{nx} = \sigma_n \cos(n, x), \qquad \tau_{ny} = \sigma_n \cos(n, y), \qquad \tau_{nz} = \sigma_n \cos(n, z)$$

@KVIHT

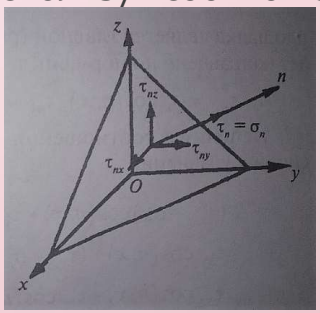
Больше материалов по компрессорной технике на сайте научно-инжиниринговой группы «Компрессорная, вакуумная, холодильная техника и системы транспорта и переработки газа» www.kviht.ru, +7 (812) 715-41-64

Доц. Ю.В. Кожухов

ПРОЧНОСТЬ ТУРБОКОМПРЕССОРОВ. РАЗДЕЛ 1. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ НАПРЯЖЕНИЙ. ГЛАВНЫЕ ОСИ НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ И ГЛАВНЫЕ НАПРЯЖЕНИЯ.



Используя соотношения Коши запишем следующую систему уравнений



$$(\tau_{xx}-\sigma_n)cos(n,x)+\tau_{yx}cos(n,y)+\tau_{zx}cos(n,z)=0,$$

$$\tau_{xy}\cos(n,x)+(\tau_{yy}-\sigma_n)\cos(n,y)+\tau_{zy}\cos(n,z)=0,$$

$$\tau_{xz}\,cos(n,x)+\tau_{yz}\,cos(n,y)+(\tau_{zz}-\sigma_n)cos(n,z)=0.$$

Получили три однородных линейных уравнения, в которых неизвестными являются направляющие косинусы углов между главными осями напряженного состоянии и осями координат x,y,z. Из аналитической геометрии:

$$cos^2(n,z)+cos^2(n,y)+cos^2(n,z)=1.$$

Следовательно, направляющие косинусы не могут быть все равными нулю, т.е. система уравнений не должна давать нулевого решения. В этом случае необходимо, чтобы определитель системы уравнений был равен нулю

$$\begin{vmatrix} \sigma_x-\sigma_n & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y-\sigma_n & \tau_{xz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z-\sigma_n \end{vmatrix}=0.$$

@KVIHT

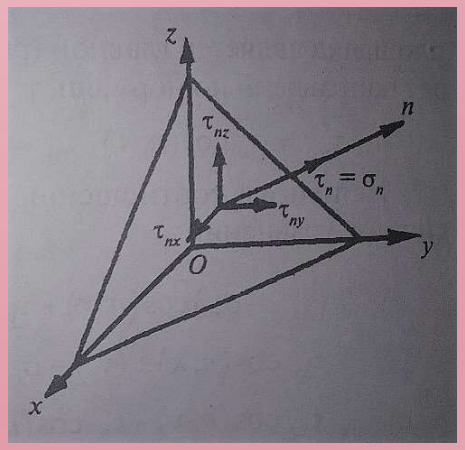
Больше материалов по компрессорной технике на сайте научно-инжиниринговой группы «Компрессорная, вакуумная, холодильная техника и системы транспорта и переработки газа» www.kviht.ru, +7 (812) 715-41-64

Доц. Ю.В. Кожухов

ПРОЧНОСТЬ ТУРБОКОМПРЕССОРОВ. РАЗДЕЛ 1. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ НАПРЯЖЕНИЙ. ГЛАВНЫЕ ОСИ НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ И ГЛАВНЫЕ НАПРЯЖЕНИЯ.

Раскрывая определитель (произведения составляющих по диагонали слева направо – положительные, справа налево – отрицательные) и объединяя члены одного порядка степени, получим после преобразований **характеристическое уравнение напряженного состояния.**

$$\sigma_n^3 - J_1\sigma_n^2 + J_2\sigma_n - J_3 = 0.$$



Здесь коэффициенты характеристического уравнения равны

$$J_1 = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z,$$

$$J_2 = \sigma_x\sigma_y + \sigma_y\sigma_z + \sigma_z\sigma_x - \tau_{xy}^2 - \tau_{yz}^2 - \tau_{zx}^2$$

$$J_3 = \sigma_x\sigma_y\sigma_z + 2\tau_{xy}\tau_{yz}\tau_{zx} - \sigma_x\tau_{yz}^2 - \sigma_y\tau_{zx}^2 - \sigma_z\tau_{xy}^2.$$

Три корня характеристического уравнения представляют три главных напряжения σ_1, σ_2, σ_3.

Главные напряжения определяются величиной и направлением внешних сил, размерами, формой и материалом тела и не зависят от направления координатных осей. Вне зависимости от направления осей координат характеристическое уравнение будет иметь одни и те же три корня. Также не зависят от выбора системы координат и значения коэффициентов характеристического уравнения J_1, J_2, J_3. Эти коэффициенты являются инвариантами тензора напряжений по отношению к повороту координатных осей.

@KVIHT

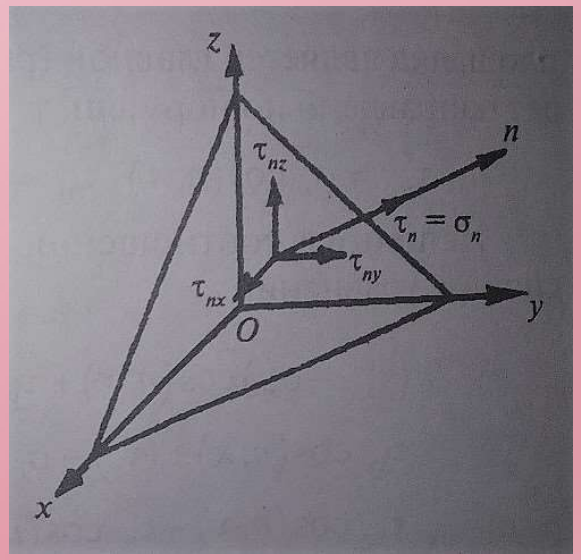
Больше материалов по компрессорной технике на сайте научно-инжиниринговой группы «Компрессорная, вакуумная, холодильная техника и системы транспорта и переработки газа» www.kviht.ru, +7 (812) 715-41-64

Значения инвариантов через главные напряжения будут иметь вид:

$$J_1 = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3,$$

$$J_2 = \sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1,$$

$$J_3 = \begin{vmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{vmatrix} = \sigma_1\sigma_2\sigma_3.$$



Тензор напряжений в главных осях будет иметь вид

$$T_\sigma = \begin{vmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{vmatrix}$$

Таким образом, напряженное состояние в точке вполне определяется главными напряжениями и ориентацией главных площадок.

@KVIHT

Больше материалов по компрессорной технике на сайте научно-инжиниринговой группы «Компрессорная, вакуумная, холодильная техника и системы транспорта и переработки газа» www.kviht.ru, +7 (812) 715-41-64

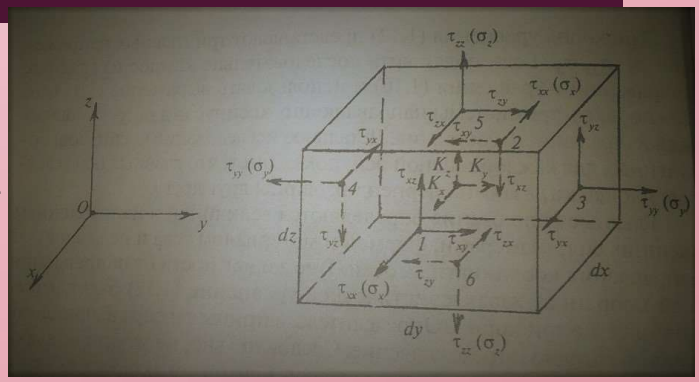
Доц. Ю.В. Кожухов

ПРОЧНОСТЬ ТУРБОКОМПРЕССОРОВ. РАЗДЕЛ 1. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ НАПРЯЖЕНИЙ. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ РАВНОВЕСИЯ В ПРЯМОУГОЛЬНОЙ И ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ СИСТЕМАХ КООРДИНАТ

- **Дифференциальные уравнения равновесия в прямоугольной системе координат**

Компоненты тензора напряжений в сплошной среде непрерывно изменяются от точки к точке, т.е. они являются непрерывными функциями координат. Необходимо выяснить, каким условиям должны подчиняться эти функции, чтобы каждый элемент тела в своем взаимодействии с соседними элементами находился в равновесии.

Исследуем условие равновесия малого (элементарного) прямоугольного параллелепипеда в системе координат x, y, z. Грани параллелепипеда параллельны координатным плоскостям и длины ребер обозначаются соответственно dx, dy, dz. Будем пренебрегать изменением напряжений в пределах каждой грани, а учитываем только очень малые изменения составляющих напряжений от одной грани к другой, вызванные малыми приращениями координат dx, dy, dz. Поверхностные силы, действующие на гранях параллелепипеда, определяем путём умножения составляющих напряжений, действующих в центре тяжести граней, на площадь грани.



Составляющие напряжений, действующих на гранях элемента и их положительное направление

Уравнение равновесия в проекциях сил на ось **x** будет иметь вид:

$$[(\boldsymbol{\sigma_x})_1 - (\boldsymbol{\sigma_x})_2]\boldsymbol{dydz} + \left[\left(\boldsymbol{\tau_{yx}}\right)_3 - \left(\boldsymbol{\tau_{yx}}\right)_4\right]\boldsymbol{dxdz} + [(\boldsymbol{\tau_{zx}})_5 - (\boldsymbol{\tau_{zx}})_6]\boldsymbol{dxdy} + \boldsymbol{K_x dxdydz} = \boldsymbol{0}$$

Здесь последнее слагаемое является объемной силой и имеет третий порядок малости, остальные слагаемые представляют собой поверхностные силы и тоже имеют третий порядок малости. Аналогичные уравнения можно записать для проекций сил на оси координат **y** и **z**. Разделив слагаемые в уравнениях на произведение **dxdydz**, которое имеет очень малое, но конечное значение, и переходя в пределе к частным производным при стягивании элемента в точку, получим **дифференциальные уравнения равновесия**:

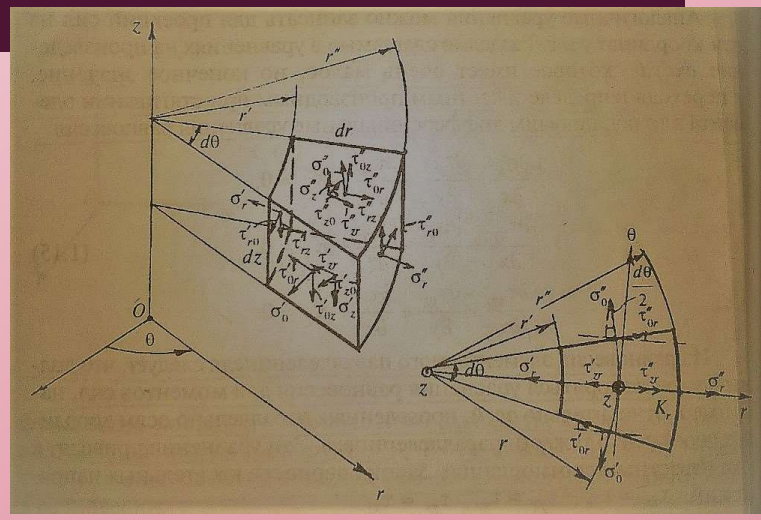
$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + K_x = 0,$$

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} + K_y = 0,$$

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + K_z = 0.$$

@KVIHT

Больше материалов по компрессорной технике на сайте научно-инжиниринговой группы «Компрессорная, вакуумная, холодильная техника и системы транспорта и переработки газа» www.kviht.ru, +7 (812) 715-41-64



- **Дифференциальные уравнения равновесия в цилиндрической системе координат**

Рассмотрим бесконечно малый элемент цилиндрического тела с прямолинейными рёбрами *dr, dz* и угловой протяженностью *dϑ* в цилиндрической системе координат. Объём элемента *dV = rd ϑdrdz.* На гранях элемента указаны положительные направления составляющих напряжений.

Рассмотрим условие равновесия элемента для проекции сил на оси координат, проходящие через центр тяжести элемента. Проекции сил на ось *r:*

$$\sigma_r'' r'' d\theta dz - \sigma_r' r' d\theta dz - (\sigma_\theta'' + \sigma_\theta') drdz \sin\frac{d\theta}{2} + (\tau_{\theta r}'' - \tau_{\theta r}') drdz \cos\frac{d\theta}{2}$$

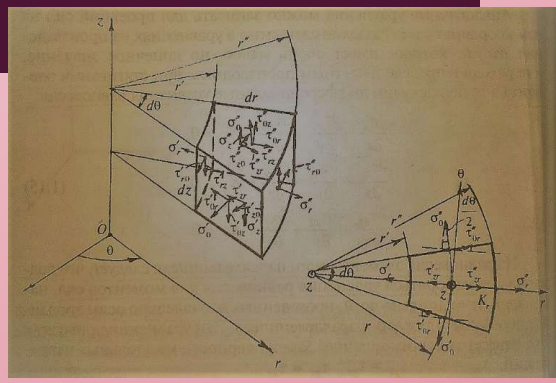
$$+ (\tau_{zr}'' - \tau_{zr}') r d\theta dr + K_r d\theta drdz = 0$$

@KVIHT

Больше материалов по компрессорной технике на сайте научно-инжиниринговой группы «Компрессорная, вакуумная, холодильная техника и системы транспорта и переработки газа» www.kviht.ru, +7 (812) 715-41-64

Доц. Ю.В. Кожухов

ПРОЧНОСТЬ ТУРБОКОМПРЕССОРОВ. РАЗДЕЛ 1. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ НАПРЯЖЕНИЙ. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ РАВНОВЕСИЯ В ПРЯМОУГОЛЬНОЙ И ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ СИСТЕМАХ КООРДИНАТ



Выразим бесконечно малые изменения напряжений через частные производные:

$$\tau''_{\theta r} - \tau'_{\theta r} = \frac{\partial \tau_{\theta r}}{r\partial\theta} r d\theta;$$

$$(\sigma''_r r'' - \sigma'_r r') = (r\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \sigma_r)dr;$$

$$\tau''_{zr} - \tau'_{zr} = \frac{\partial \tau_{zr}}{\partial z} dz.$$

Подставляя полученные выражения в уравнение для проекции сил на ось *r* и устремляя элемент в точку, получаем, что в пределе $\sigma''_\theta = \sigma'_\theta = \sigma_\theta, sin\frac{d\theta}{2} = \frac{d\theta}{2}, cos\frac{d\theta}{2} = 1$. Разделив все члены уравнения на величину $dV = rd\theta drdz$, приходим к **дифференциальному уравнению равновесия в проекции на ось r**

$$\boldsymbol{\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\partial \tau_{\theta r}}{r\partial\theta} + \frac{\partial \tau_{zr}}{\partial z} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} + K_r = 0}$$

Рассматривая условие равновесия элемента для проекций сил на оси координат θ, z, **получим другие уравнения равновесия:**

$$\boldsymbol{\frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_\theta}{r\partial\theta} + \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial z} + \frac{2\tau_{r\theta}}{r} + K_\theta = 0}$$

$$\boldsymbol{\frac{\partial \tau_{rz}}{\partial r} + \frac{\partial \tau_{\theta z}}{r\partial\theta} + \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial z} + \frac{\tau_{rz}}{r} + K_z = 0}$$

@KVIHT

Больше материалов по компрессорной технике на сайте научно-инжиниринговой группы «Компрессорная, вакуумная, холодильная техника и системы транспорта и переработки газа» www.kviht.ru, +7 (812) 715-41-64